Základní metoda

Řešíme rovnici $y' + a(x)y = b(x)$.

Základní metoda

Řešíme rovnici $y' + a(x)y = b(x)$.

Nechť

- $A(x)$ je primitivní funkcí k $a(x)$ na intervalu I
- $B(x)$ je primitivní funkce k funkci $b(x)e^{A(x)}$ (na I),

potom $(ye^{A(x)})' = e^{A(x)}y' + a(x)ye^{A(x)} = b(x)e^{A(x)}$

a tedy $ye^{A(x)} = B(x) + C$, kde C je nějaká reálná konstanta.

Základní metoda

Řešíme rovnici $y' + a(x)y = b(x)$.

Nechť

- $A(x)$ je primitivní funkcí k $a(x)$ na intervalu I
- $B(x)$ je primitivní funkce k funkci $b(x)e^{A(x)}$ (na I),

potom $(ye^{A(x)})' = e^{A(x)}y' + a(x)ye^{A(x)} = b(x)e^{A(x)}$

a tedy $ye^{A(x)} = B(x) + C$, kde C je nějaká reálná konstanta.

Všechna řešení rovnice (na I) pak mají tvar

$$y = B(x)e^{-A(x)} + Ce^{-A(x)}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Funkci $e^{A(x)}$ se říká integrační faktor.

Příklady

Řešíme rovnici $y' + 2x^3 y = x^7$.

Příklady

Řešíme rovnici $y' + 2x^3 y = x^7$.

$a(x) = 2x^3, \quad b(x) = x^7, \quad A(x) = \frac{x^4}{2},$

Příklady

Řešíme rovnici $y' + 2x^3 y = x^7$.

$$a(x) = 2x^3, \quad b(x) = x^7, \quad A(x) = \tfrac{x^4}{2},$$

$$\int b(x)e^{A(x)}\,dx = \int x^7 e^{\frac{x^4}{2}}\,dx = \left| \begin{matrix} t = \frac{x^4}{2}, \\ dt = 2x^3\,dx \end{matrix} \right| = \int te^t\,dt$$

$$\stackrel{c}{=} e^t(t-1) = e^{\frac{x^4}{2}}\left(\frac{x^4}{2} - 1\right),$$

Příklady

Řešíme rovnici $y' + 2x^3y = x^7$.

$$a(x) = 2x^3, \quad b(x) = x^7, \quad A(x) = \tfrac{x^4}{2},$$

$$\int b(x)e^{A(x)}\,dx = \int x^7 e^{\frac{x^4}{2}}\,dx = \left| \begin{matrix} t = \frac{x^4}{2}, \\ dt = 2x^3\,dx \end{matrix} \right| = \int te^t\,dt$$

$$\stackrel{c}{=} e^t(t-1) = e^{\frac{x^4}{2}}\left(\frac{x^4}{2} - 1\right),$$

$$B(x) = e^{\frac{x^4}{2}}\left(\tfrac{x^4}{2} - 1\right).$$

Příklady

Řešíme rovnici $y' + 2x^3 y = x^7$.

$a(x) = 2x^3, \quad b(x) = x^7, \quad A(x) = \frac{x^4}{2},$

$$\int b(x)e^{A(x)}\,dx = \int x^7 e^{\frac{x^4}{2}}\,dx = \left| \begin{matrix} t = \frac{x^4}{2}, \\ dt = 2x^3\,dx \end{matrix} \right| = \int te^t\,dt$$

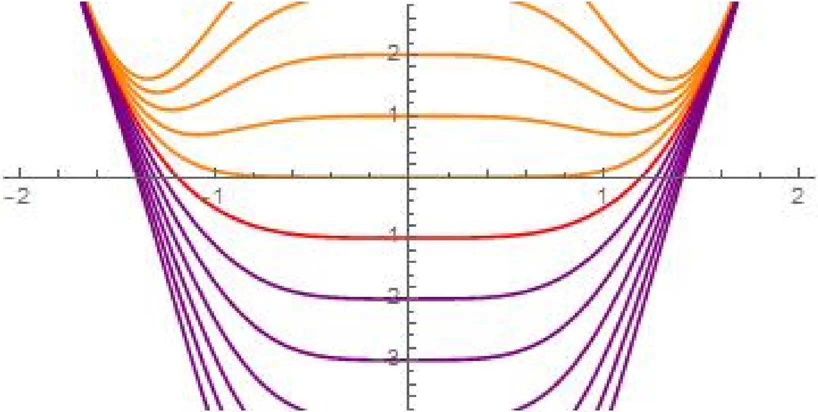
$$\stackrel{c}{=} e^t(t-1) = e^{\frac{x^4}{2}}\left(\frac{x^4}{2} - 1\right),$$

$B(x) = e^{\frac{x^4}{2}}\left(\frac{x^4}{2} - 1\right).$

$$\begin{aligned} y(x) &= B(x)e^{-A(x)} + Ce^{-A(x)} \\ &= e^{\frac{x^4}{2}}\left(\frac{x^4}{2} - 1\right)e^{-\frac{x^4}{2}} + Ce^{-\frac{x^4}{2}} \\ &= \frac{x^4}{2} - 1 + Ce^{-\frac{x^4}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Příklady

$$y(x) = \frac{x^4}{2} - 1 + Ce^{-\frac{x^4}{2}}$$



Příklady

Řešíme rovnici $\cos^2(x)y' + y = e^{\tan x}$.

Příklady

Řešíme rovnici $\cos^2(x)y' + y = e^{\tan x}$.

Nejdříve převedeme do $y' + \dfrac{y}{\cos^2 x} = \dfrac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}$.

Příklady

Řešíme rovnici $\cos^2(x)y' + y = e^{\tan x}$.

Nejdříve převedeme do $y' + \frac{y}{\cos^2 x} = \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}$.

$$a(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad b(x) = \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}, \quad A(x) = \tan x,$$

Příklady

Řešíme rovnici $\cos^2(x)y' + y = e^{\tan x}$.

Nejdříve převedeme do $y' + \dfrac{y}{\cos^2 x} = \dfrac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}$.

$$a(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad b(x) = \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}, \quad A(x) = \tan x,$$

$$\int b(x)e^{A(x)}\,dx = \int \frac{e^{2\tan x}}{\cos^2 x}\,dx = \begin{vmatrix} t = 2\tan x, \\ dt = \frac{2}{\cos^2 x}\,dx \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\int e^t\,dt$$
$$\overset{c}{=} \frac{1}{2}e^t = \frac{1}{2}e^{2\tan x},$$

$B(x) = \frac{1}{2}e^{2\tan x}$.

Příklady

Řešíme rovnici $\cos^2(x)y' + y = e^{\tan x}$.

Nejdříve převedeme do $y' + \dfrac{y}{\cos^2 x} = \dfrac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}$.

$$a(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad b(x) = \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}, \quad A(x) = \tan x,$$

$$\int b(x)e^{A(x)}\, dx = \int \frac{e^{2\tan x}}{\cos^2 x}\, dx = \left| \begin{matrix} t = 2\tan x, \\ dt = \frac{2}{\cos^2 x}\, dx \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int e^t\, dt$$
$$\overset{c}{=} \frac{1}{2}e^t = \frac{1}{2}e^{2\tan x},$$

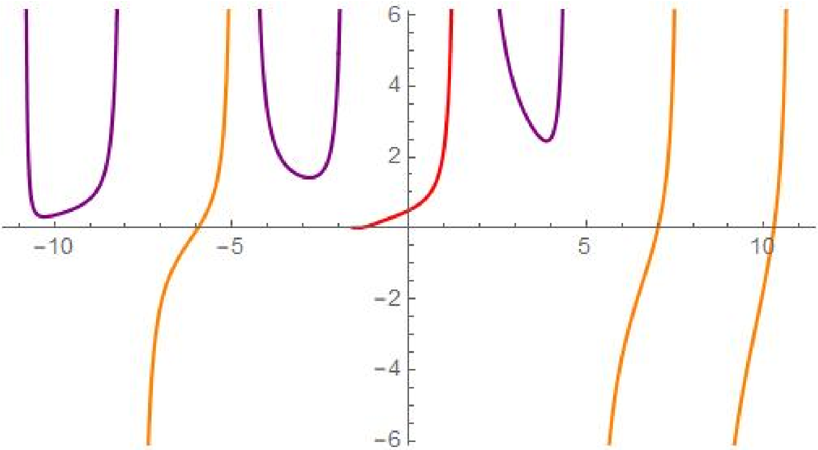
$B(x) = \frac{1}{2}e^{2\tan x}$.

$$y(x) = B(x)e^{-A(x)} + Ce^{-A(x)} = \frac{1}{2}e^{2\tan x}e^{-\tan x} + Ce^{-\tan x}$$
$$= \frac{1}{2}e^{\tan x} + Ce^{-\tan x}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) + k\pi, k \in \mathbb{Z}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Lepit pro původni rovnici nelze.

Příklady

$$y(x) = \frac{1}{2}e^{\tan x} + Ce^{-\tan x}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) + k\pi, k \in \mathbb{Z}, \quad C \in \mathbb{R}.$$



Převod na lineární rovnice - Bernoulliho rovnice

Řešíme rovnici $y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}$

Převod na lineární rovnice - Bernoulliho rovnice

Řešíme rovnici $y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}$

po úpravě $(1-\alpha)y'y^{-\alpha} + (1-\alpha)p(x)y^{1-\alpha} = (1-\alpha)q(x)$

a substituci $z = y^{1-\alpha}$, $a(x) = (1-\alpha)p(x)$ a $b(x) = (1-\alpha)q(x)$

dostaneme rovnici $z' + a(x)z = b(x)$.

Převod na lineární rovnice - Bernoulliho rovnice

Řešíme rovnici $y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}$

po úpravě $(1-\alpha)y'y^{-\alpha} + (1-\alpha)p(x)y^{1-\alpha} = (1-\alpha)q(x)$

a substituci $z = y^{1-\alpha}$, $a(x) = (1-\alpha)p(x)$ a $b(x) = (1-\alpha)q(x)$

dostaneme rovnici $z' + a(x)z = b(x)$.

Zkusíme vyřešit rovnici $xy' + y = x^3y^2$.
Nejdříve upravíme na $y' + \dfrac{y}{x} = x^2y^2$,

$\alpha = 2$ a celou rovnici přenásobíme $-\dfrac{1}{y^2}$.

Dostaneme (pro $y \neq 0$) $-\dfrac{y'}{y^2} - \dfrac{1}{xy} = -x^2$ a položáme $z = \dfrac{1}{y}$,
což dává $z' = -\dfrac{y'}{y^2}$.

Máme tedy rovnici $z' - \dfrac{z}{x} = -x^2$.

Převod na lineární rovnice - Bernoulliho rovnice

Řešíme rovnici $z' - \frac{z}{x} = -x^2$.

Převod na lineární rovnice - Bernoulliho rovnice

Řešíme rovnici $z' - \frac{z}{x} = -x^2$.

$$a(x) = -\frac{1}{x}, \quad b(x) = -x^2, \quad A(x) = -\log|x|,$$

Převod na lineární rovnice - Bernoulliho rovnice

Řešíme rovnici $z' - \frac{z}{x} = -x^2$.

$$a(x) = -\frac{1}{x}, \quad b(x) = -x^2, \quad A(x) = -\log|x|,$$

$$\int b(x)e^{A(x)}\,dx = \int \frac{-x^2}{|x|}\,dx = -\operatorname{sgn}(x)\int x\,dx \quad \stackrel{c}{=} -\operatorname{sgn}(x)\frac{x^2}{2},$$

$B(x) = -\operatorname{sgn}(x)\frac{x^2}{2}$.

Převod na lineární rovnice - Bernoulliho rovnice

Řešíme rovnici $z' - \frac{z}{x} = -x^2$.

$$a(x) = -\frac{1}{x}, \quad b(x) = -x^2, \quad A(x) = -\log|x|,$$

$$\int b(x)e^{A(x)}\,dx = \int \frac{-x^2}{|x|}\,dx = -\operatorname{sgn}(x)\int x\,dx \quad \stackrel{c}{=} -\operatorname{sgn}(x)\frac{x^2}{2},$$

$B(x) = -\operatorname{sgn}(x)\frac{x^2}{2}$.

$$z(x) = B(x)e^{-A(x)} + Ce^{-A(x)} = -\operatorname{sgn}(x)\frac{x^2}{2}|x| + C|x|$$
$$= -\frac{x^3}{2} + Cx, \quad x \in (-\infty, 0), (0, \infty), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Převod na lineární rovnice - Bernoulliho rovnice

Řešíme rovnici $z' - \frac{z}{x} = -x^2$.

$$a(x) = -\frac{1}{x}, \quad b(x) = -x^2, \quad A(x) = -\log|x|,$$

$$\int b(x)e^{A(x)}\,dx = \int \frac{-x^2}{|x|}\,dx = -\operatorname{sgn}(x)\int x\,dx \quad \stackrel{c}{=} -\operatorname{sgn}(x)\frac{x^2}{2},$$

$B(x) = -\operatorname{sgn}(x)\frac{x^2}{2}$.

$$z(x) = B(x)e^{-A(x)} + Ce^{-A(x)} = -\operatorname{sgn}(x)\frac{x^2}{2}|x| + C|x|$$
$$= -\frac{x^3}{2} + Cx, \quad x \in (-\infty, 0), (0, \infty), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Vrátíme-li se k původní rovnici, dostaneme $(y = \frac{1}{z})$

$$y(x) = \frac{2}{Dx - x^3}, \quad x \in \begin{cases} (-\infty, 0), (0, \infty), & D \le 0 \\ (-\infty, -\sqrt{D}), (-\sqrt{D}, 0), (0, \sqrt{D}), (\sqrt{D}, \infty), & D > 0 \end{cases}$$

Převod na lineární rovnice - Bernoulliho rovnice

$$y(x) = \frac{2}{Dx - x^3}, \quad x \in \begin{cases} (-\infty, 0), (0, \infty), & D \leq 0 \\ (-\infty, -\sqrt{D}), (-\sqrt{D}, 0), (0, \sqrt{D}), (\sqrt{D}, \infty), & D > 0 \end{cases}$$